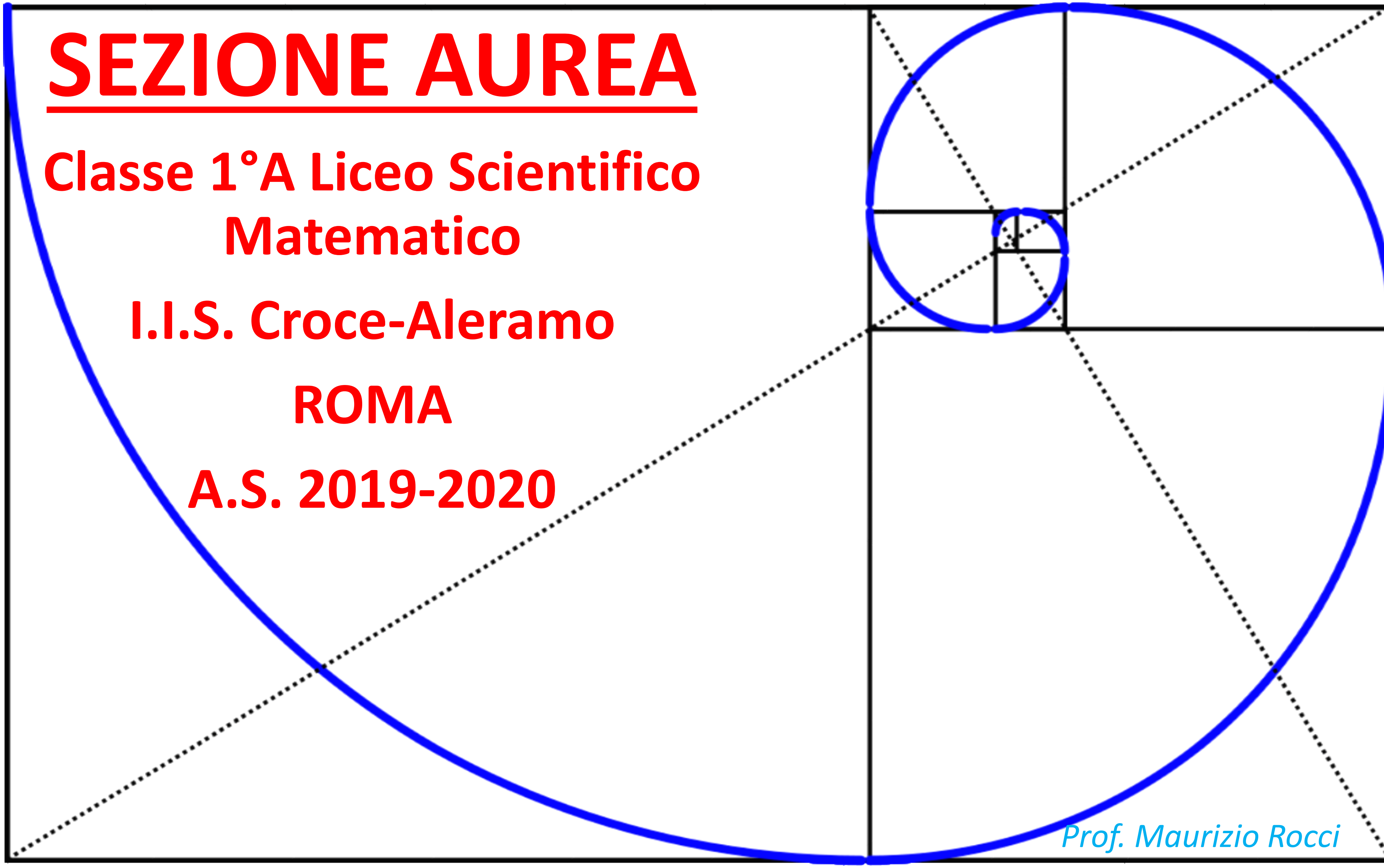
SEZIONE AUREA

Classe 1°A Liceo Scientifico Matematico

I.I.S. Croce-Aleramo

ROMA

A.S. 2019-2020



Prof. Maurizio Rocci

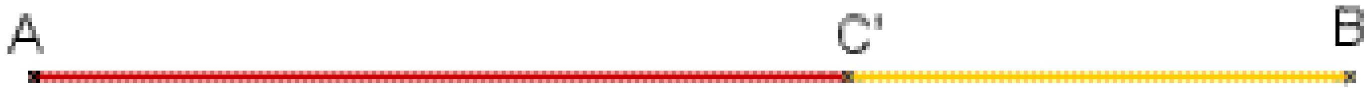
UN PICCOLO GRANDE NUMERO

1,61803398874989484820458683436563811772030917980576286213544862270526046281890244970720720418939113
7484754088075386891752126633862223536931793180060766726354433389086595939588290565832266131992829026
78806752087668925017116962070322210432162695486262963136144381497587122034080588795445474924261856
95364864449241044320771344947049565846885098743344221254487706647809158846074998871240076521705 7......

Cosa è la sezione aurea ?

Nell'ambito dell'arte e della matematica si indica con sezione aurea di un segmento quella sua parte che è media proporzionale tra l'intero segmento e la parte rimanente. In formule, prendendo come modello il segmento qui sotto (diviso in media e ultima ragione), vale la relazione:

AB : AC = AC : CB



Il rapporto aureo è il rapporto tra un segmento e la sua sezione aurea:

φ = AB/AC = rapporto aureo

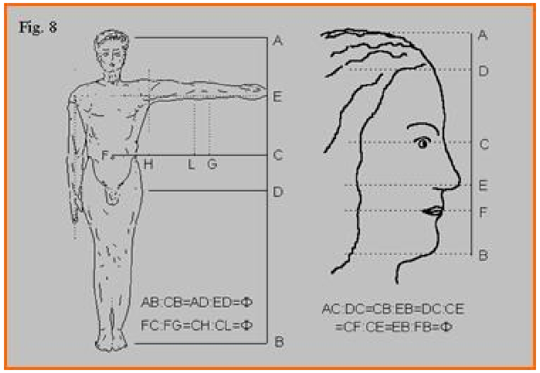
Tale rapporto vale approssimativamente 1,618. Il numero esatto può essere ricavato dalla formula:

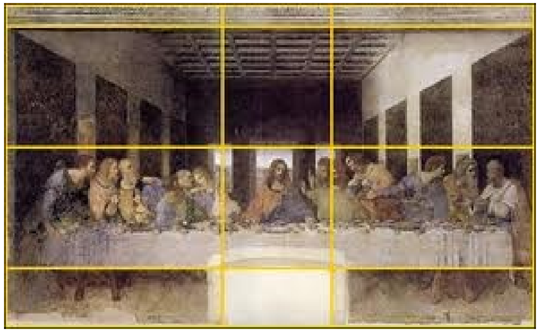
$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}6180339887$$

Sia le sue proprietà geometriche e matematiche, che la frequente riproposizione in svariati contesti naturali hanno impressionato nei secoli la mente dell'uomo, che è arrivato a coglierví col tempo un ideale di bellezza e armonia, spingendosi a ricercarlo e, in alcuni casi, a ricrearlo quale "canone di bellezza".

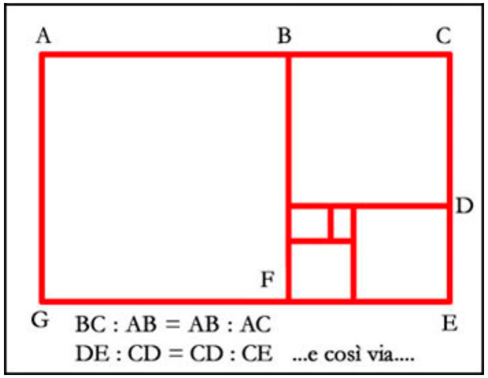
È possibile prolungare ogni segmento aureo all'infinito mantenendo le sue proporzioni,in che modo possiamo fare ciò? Lo possiamo fare sommando al nostro segemnto aureo un altro segmento che sia congruente alla parte maggiore del nostro segmento di partenza.

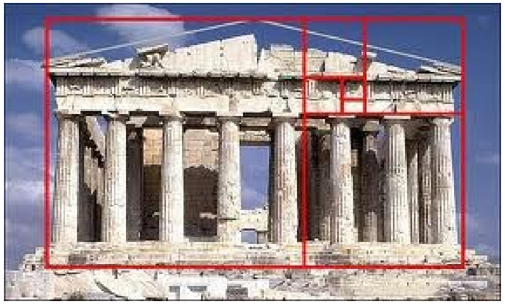
Perché la si studia ?





Molti dei più grandi studiosi di matematica, come molti pittori, architetti e musicisti di tutto il mondo hanno studiato la sezione aurea perché sembra rappresentare lo standard di riferimento per la perfezione, la grazia, l'armonia e la bellezza Infatti la si può riscontrare in molti aspetti della natura e addirittura … in noi stessi.

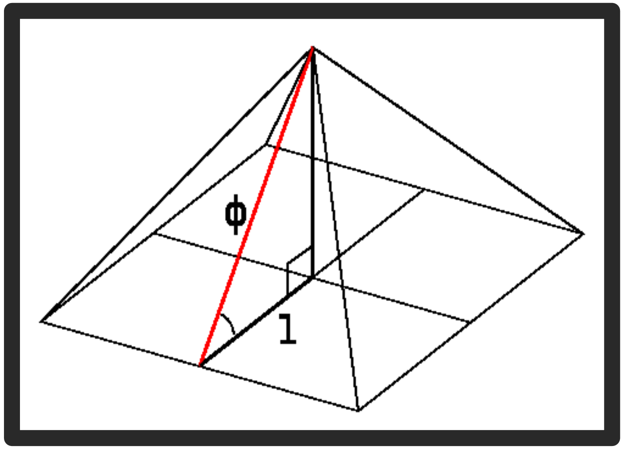




Storia pre-ellenica

I cultori di storia della matematica indicano che su tale argomento vi sono diverse questioni irrisolte: se e quali furono i primi a conoscerla ed utilizzarla consapevolmente non si può definire con certezza.
Alcune tavolette fanno presupporre che il primo popolo a studiare la sezione aurea fu quello dei Babilonesi. Infatti nel 1936 nella città iraniana di Susa fu ritrovata l'inscrizione in figura su una tavoletta cuneiforme risalente al II millennio a.C dove si proverebbe che conoscessero l'area del pentagono.
Dopo i babilonesi un altro popolo che usò la sezione aurea per grandi imprese fu il popolo egizio per costruire la piramide di Cheope, da dove il numero aureo si riscontra nel rapporto tra il semi lato della piramide e l'altezza della facciata triangolare.

Tavoletta babilonese



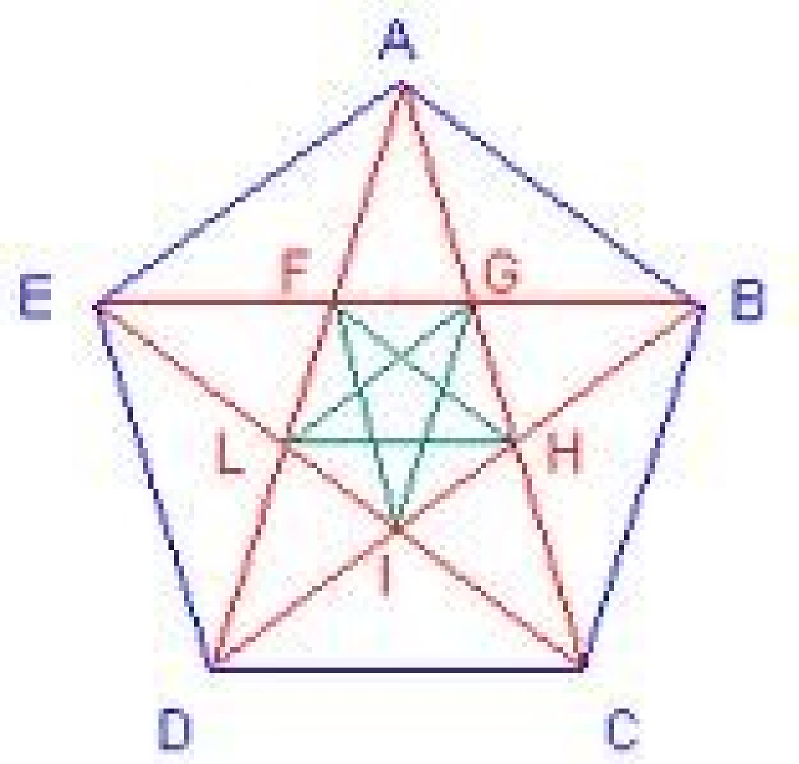
Piramide di cheope

I Pitagorici

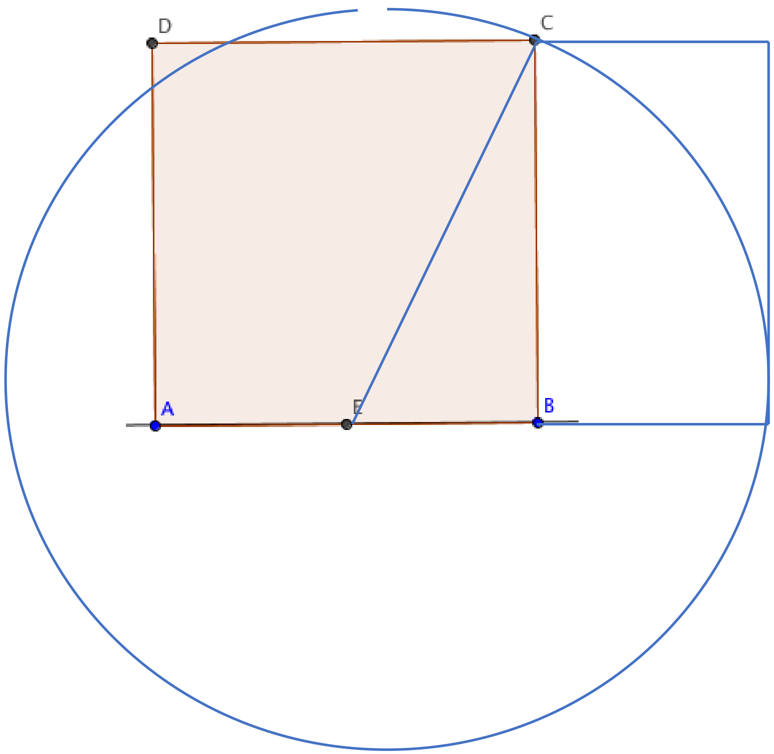
Ma i primi veri studi riguardanti la sezione aurea comparvero per la prima volta nella geometria pitagorica nel 500a.C. con il nome di “divisione di un segmento in media ed estrema ragione”; la ritroviamo nello studio del “pentagono stellato” che si dice fosse il simbolo della scuola pitagorica.

Il pentagono stellato si costruisce a partire da un pentagono regolare *ABCDE* tracciando le cinque diagonali. Queste si intersecano in punti che formano un altro pentagono regolare *FGHIL*.

La cosa sorprendente è che in ogni caso un punto di intersezione divide una diagonale in due segmenti disuguali tali che il rapporto tra l’intera diagonale e il segmento maggiore è uguale al rapporto tra questo e il segmento minore. Quindi ogni diagonale è suddivisa in *“media ed estrema ragione”.*



Il rettangolo aureo



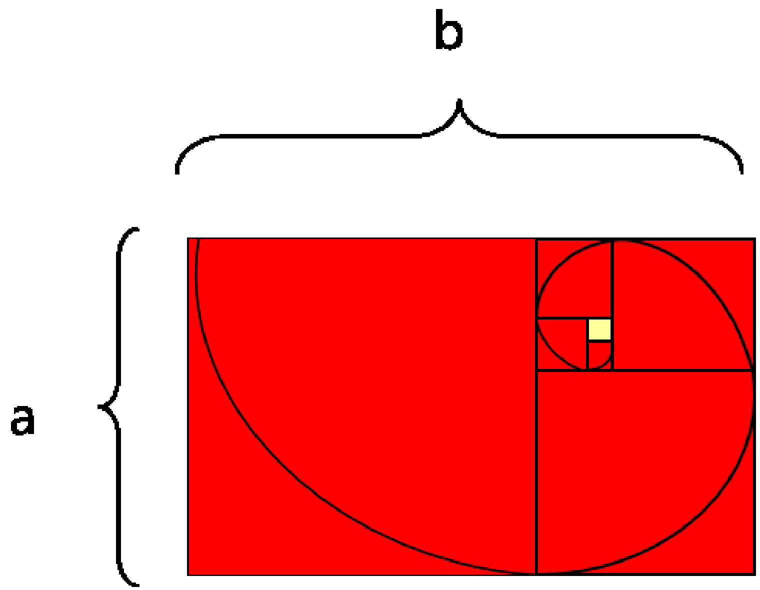
Cos'è il rettangolo aureo?

Il rettangolo aureo è un qualsiasi rettangolo I cui lati soddisfano il rapporto aureo.
Esso venne probabilmente usato per la prima volta da Euclide nel 300 a.C "negli elementi di Euclide", poi fu rivisto dal popolo ellenico, anche nell' architettura.

Come si costruisce ?

Consideriamo un quadrato; con un compasso puntato nel punto medio di uno dei quattro lati e con apertura pari alla distanza dal punto medio al vertice non adiacente ad esso. Tracciamo poi un arco e prolunghiamo la base del quadrato finchè si interseca con l'arco infine completiamo la figura costruendo un rettangolo con base il prolungamento del lato del quadrato ed altezza il lato stesso.

Evoluzione rettangolo nel piano



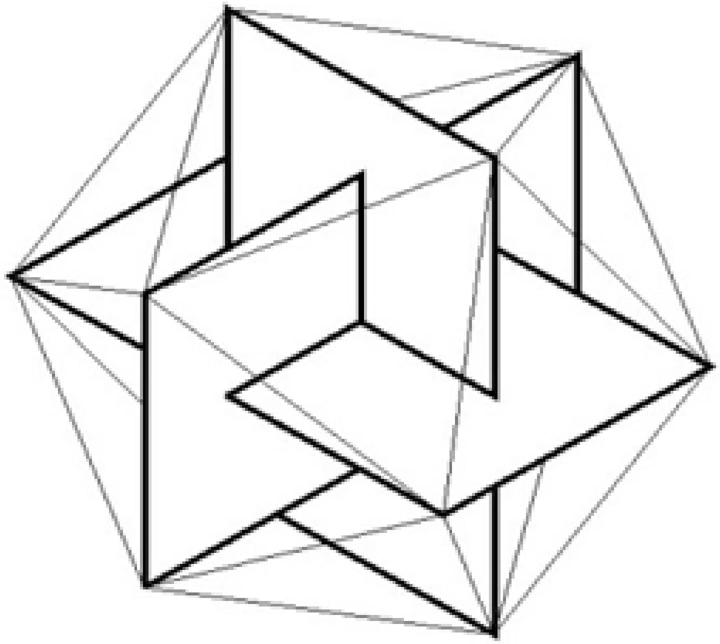
La spirale meravigliosa

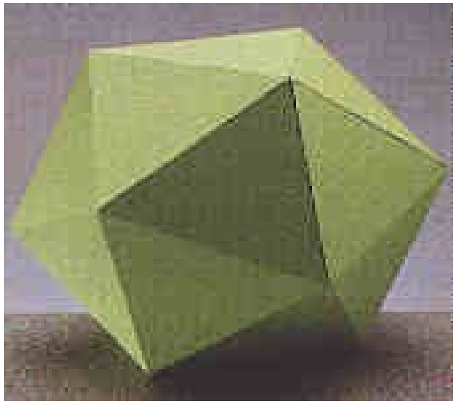
Partendo da un rettangolo aureo possiamo osservare uno dei fenomeni più belli della sezione aurea: la spirale meravigliosa.
Da questo rettangolo formiamo al suo interno un quadrato che ha per lati i lati minori del rettangolo. Vedremo che si viene a formare un altro rettangolo che sarà sempre aureo.
Ripetiamo questa operazione infinite volte … dopodiché prendiamo il compasso e da ogni vertice tracciamo un arco di ampiezza pari al lato del quadrato più piccolo e faremo il resto anche per gli altri quadrati … così verrà a formarsi una linea continua la nostra spirale meravigliosa (spirale logaritmica).

Evoluzione rettangolo nello spazio

Icosaedro

Se si prendono tre rettangoli aurei uguali (giacenti su piani due a due ortogonali con i centri coincidenti) e si incastrano, unendo i vertici si otterrà un icosaedro (poliedro regolare con 20 facce triangolari) mentre se sono incentrati vertici dei tre rettangoli aurei, si forma un dodecaedro (12 facce pentagonali).

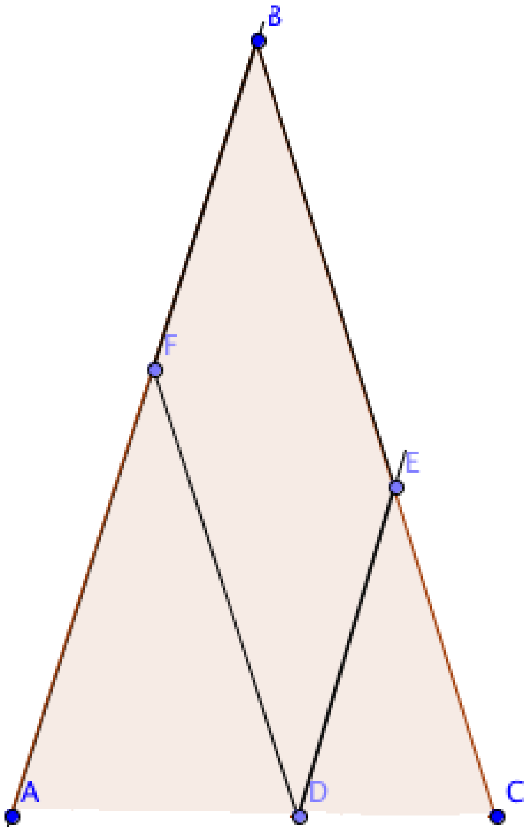




Compasso aureo

Compasso aureo

Il compasso d'oro venne inventato da Adalbert Goerniger e viene chiamato così perchè riesce ad individuare i rapporti aurei con semplicità ed immediatezza.



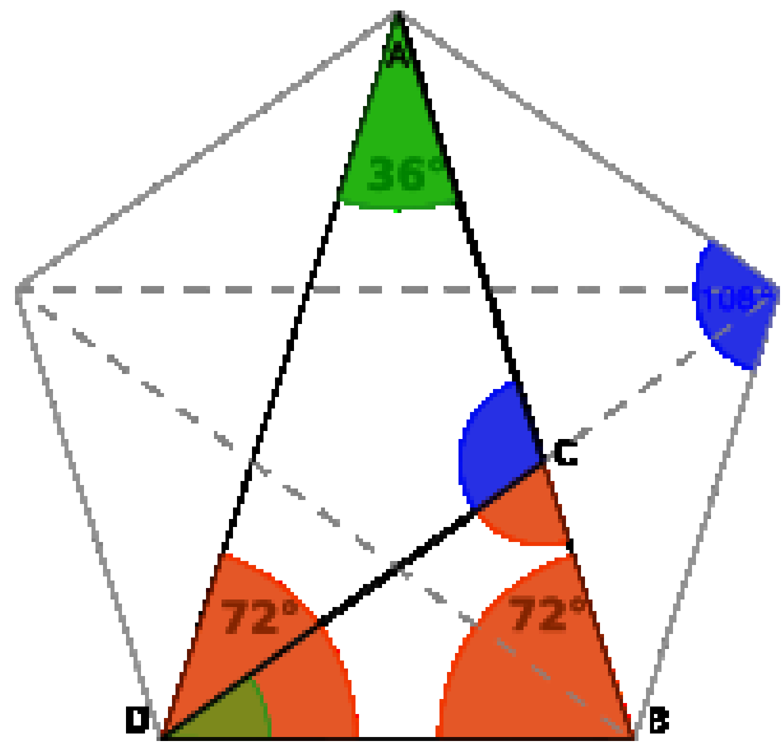
Come si costruisce

Il compasso è formato da 4 aste e due delle quali (AB e BC) sono le piu grandi, sono di uguale lunghezza e si intersecano nel punto B e la somma di FD ed ED è congruente ad AB che è un segmento aureo

In geometria

IL TRIANGOLO AUREO

La divisione di un segmento AB in media e ultima ragione può essere effettuata costruendo un pentagono regolare, del quale AB rappresenta una diagonale e disegnandovi all'interno un "triangolo aureo", ossia un triangolo isoscele la cui base corrisponde al lato del pentagono (ed è sezione aurea della diagonale) e i lati corrispondono alle diagonali congiungenti quest'ultimo al vertice opposto.



BD è sezione aurea di AB. Consideriamo i triangoli BCD e ABD essi sono simili perché aventi gli angoli uguali. Perciò si instaura la proporzione: AB : BD = BD : BC

Poiché ADC è isoscele e CD = AC possiamo dire che:

$$AB : AC = AC : CB$$

(Proporzione che lega due grandezze geometriche nel rapporto aureo)

In geometria

LEONARDO FIBONACCI

Fino al rinascimento le dimostrazioni della sezione aurea e del rapporto aureo erano date geometricamente. Si deve ai ragionamenti di Leonardo Fibonacci e di molti altri matematici rinascimentali, invece, la scoperta della costante che permette di trovare facilmente la sezione aurea di un segmento.

Chiamiamo con l il segmento AB e con x la lunghezza della sua sezione aurea. Possiamo quindi dire che:

$$l : x = x : (l - x)$$

Risolvendo la proporzione otteniamo:

$$x^2 = l\,(l - x)$$

$$x^2 + lx - l^2 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}\,l$$

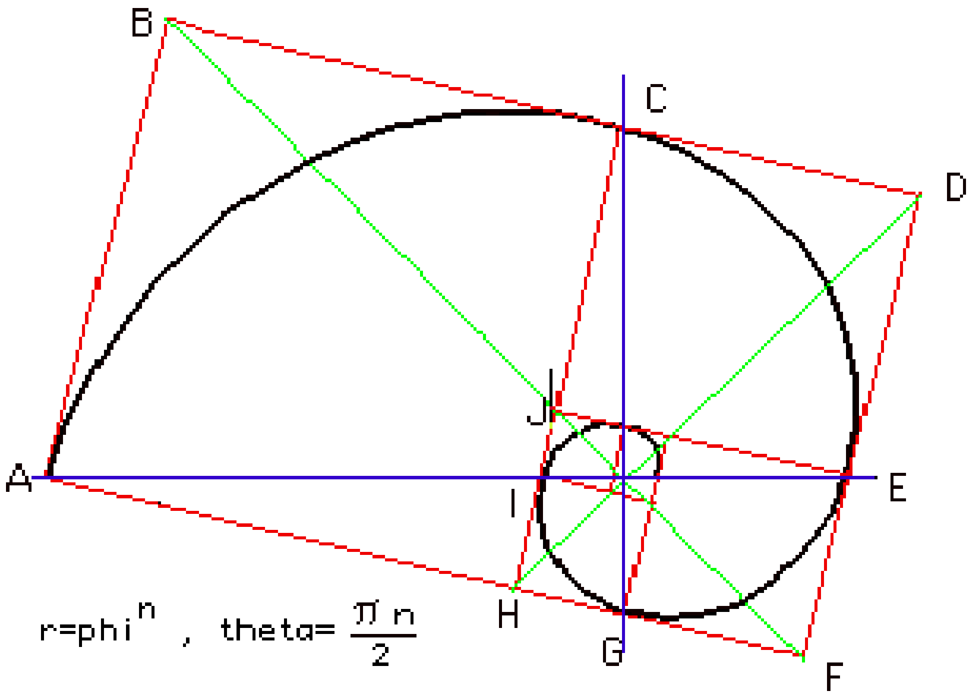
$$x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\,l$$

$$\varphi = \frac{l}{x} = \frac{l}{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\,l} = \frac{2}{-1+\sqrt{5}} = \frac{2(+1+\sqrt{5})}{(-1+\sqrt{5})(+1+\sqrt{5})} = \frac{2(1+\sqrt{5})}{-1+5} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

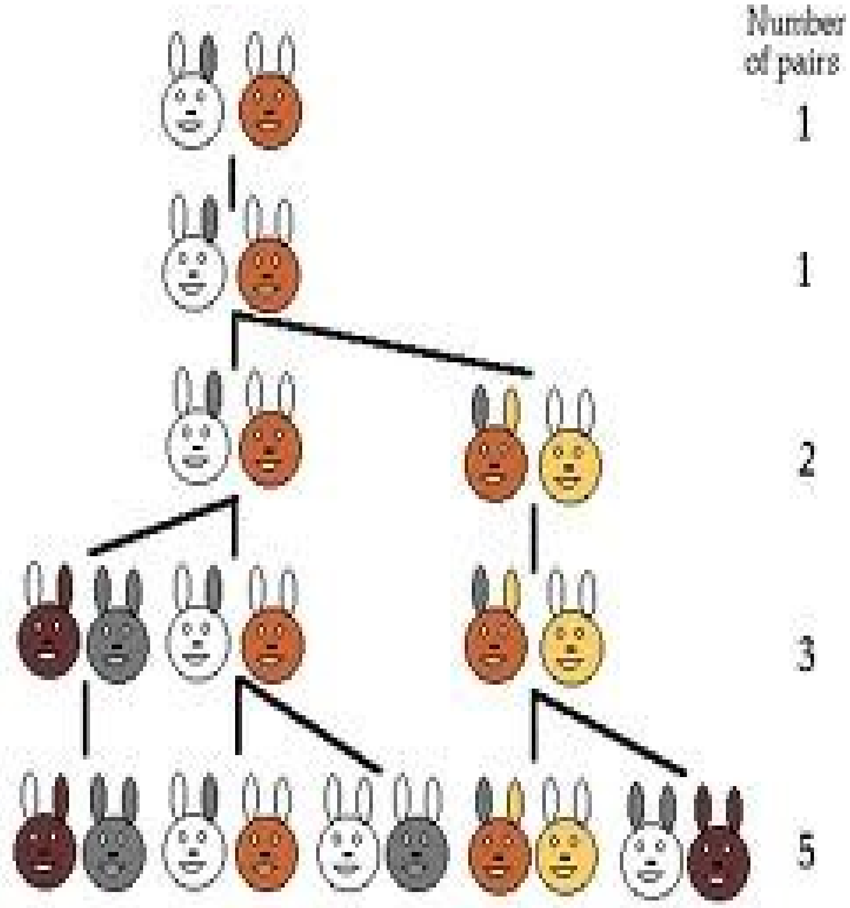
$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

AI NOSTRI GIORNI…

Negli ultimi due secoli si è a lungo discusso sull'origine del termine "aurea" o "divina" associati alla sezione o al rapporto. Poi, nel '900, con l'invenzione di computer sempre più potenti si è arrivati a definire nel 1966 il rapporto aureo fino alla 4599^ cifra. Infine, nello stesso anno fino alla decimillionesima.



In zoologia



Successione di Fibonacci

La sezione aurea è legata ad un altra interessante struttura matematica, nota come la *serie di Fibonacci,* che corrisponde ad una successione di numeri interi, ogni cui termine (dal terzo in poi) è uguale alla somma dei due termini precedenti. I primi termini di tale successione sono:

1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144,233,377…

Questa particolare sequenza numerica si ritrova in maniera inaspettata nei contesti più disparati soprattutto nella zoologia.
Il problema di Fibonacci era il seguente:
Immaginiamo di chiudere una coppia di conigli in un recinto.
Sappiamo che ogni coppia di conigli:
a) inizia a generare dal secondo mese di età;
b) genera una nuova coppia ogni mese;
c) non muore mai.
Quanti conigli ci saranno nel recinto dopo un anno?

Tutto questo cosa c'entra con quello visto prima?
È stato dimostrato che un numero della successione diviso per il suo precedente da come risultato un numero molto vicino a quello aureo

In natura

Vari aspetti in natura

In natura la sezione aurea è molto frequente: come nelle pigne, nei girasoli, nelle chiocciole e anche nell'universo infatti, da osservazioni sperimentali si è riscontrato che alcune Galassie, tra cui anche la via Lattea, presentano bracci luminosi di formazione stellare che si estendono dal centro seguendo il tracciato di una spirale aurea.

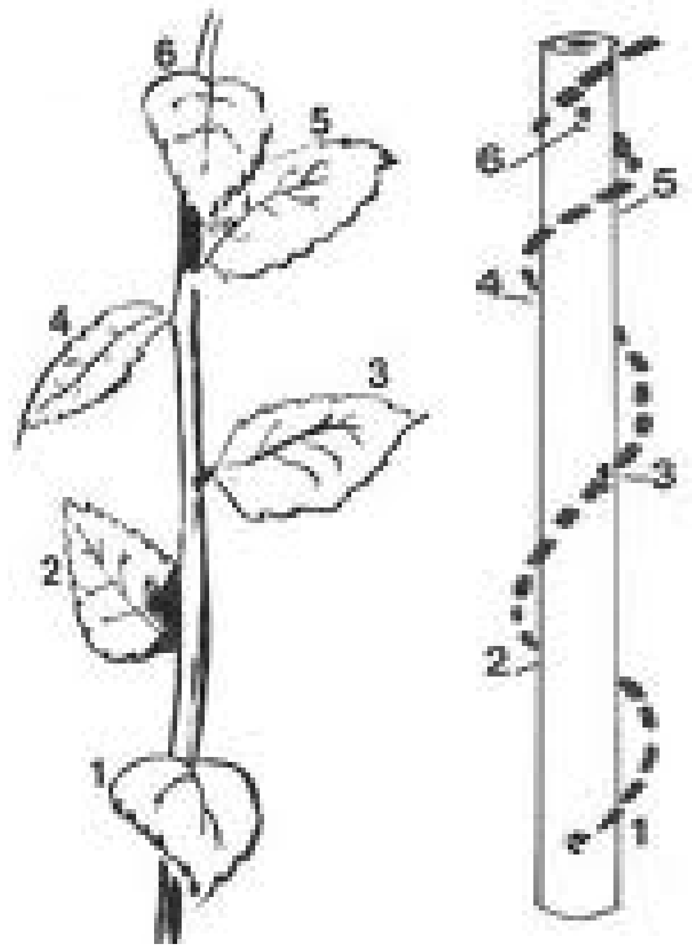
Anche la coda delle comete assume la forma di spirale aurea, così come il guscio di una conchiglia, i petali di una rosa e i rami di un albero.

In natura

La Fillotassi

L’accrescimento delle piante non avviene in modo casuale, ma avviene secondo regole che spesso richiamano i numeri di Fibonacci.

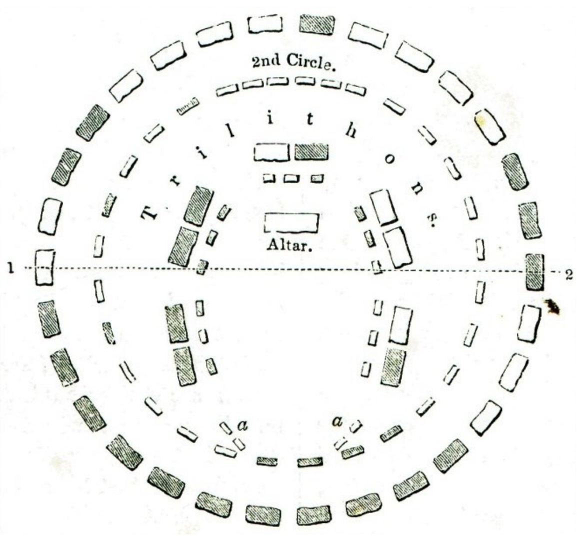
Le foglie crescono secondo una spirale tale che il numero di giri formati ruotando in un verso e nell’altro sono due numeri di Fibonacci consecutivi (le foglie crescono in modo tale che partendo da una prima foglia qualunque, noteremo che la sesta foglia si trova sempre sopra alla prima) in questo modo rami e foglie possono avere la massima esposizione al sole, alla pioggia,all'aria poichè le foglie superiori non coprono le inferiori.



Nell’arte

STONEHENGE

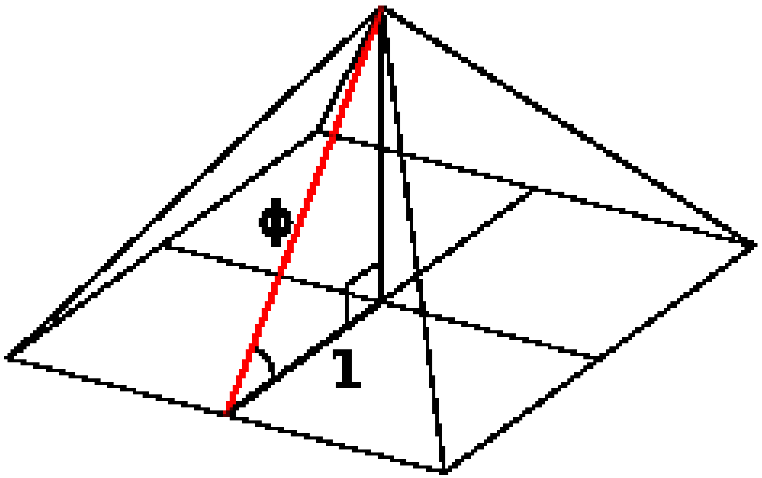
I megaliti di Stonehenge sono il più famoso esempio di arte preistorica. La storia del luogo comincia nel 2800 a. C.. I vari anelli di megaliti sono stati eretti in almeno in tre fasi diverse e il sito era stato adibito alla sepoltura dei morti, ma aveva anche funzioni religiose e astronomiche.



Nell’arte

LA PIRAMIDE DI CHEOPE

La piramide di Cheope fu edificata nella valle di El-Giza all’inizio dell’antico regno (2750-2195 a.C.) per ospitare le spoglie del faraone Cheope. Ha una base di 230 metri ed una altezza di 145: il rapporto base/altezza corrisponde a 1,58 molto vicino a 1,6.

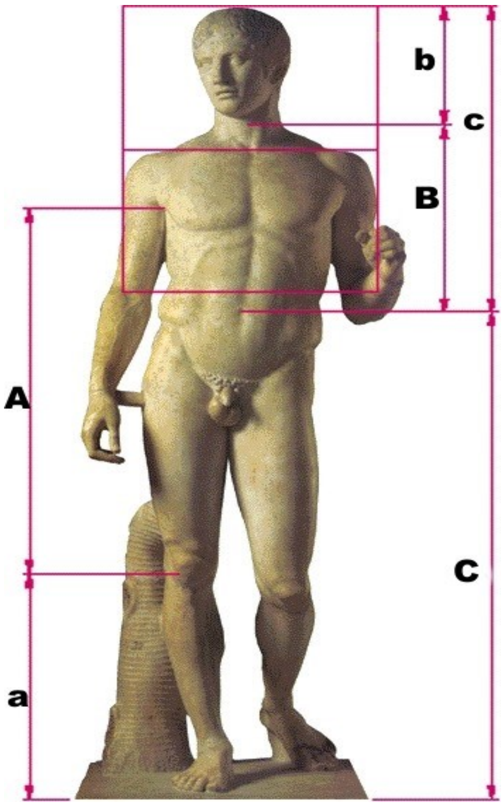


Nell'arte

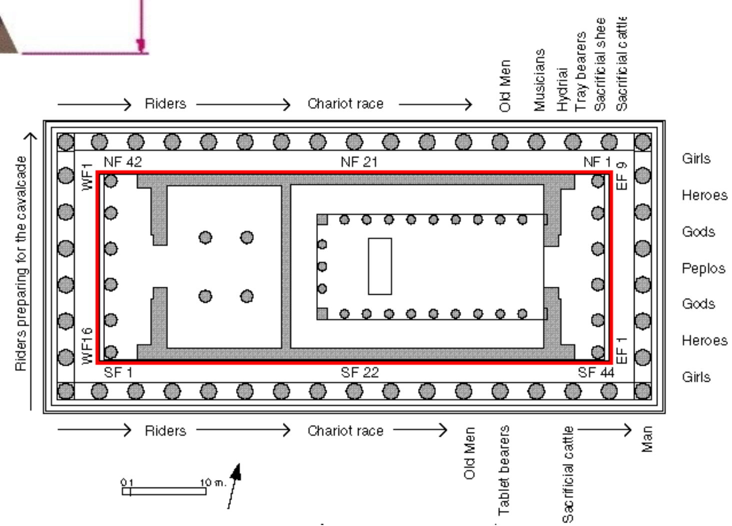
Architettura e scultura

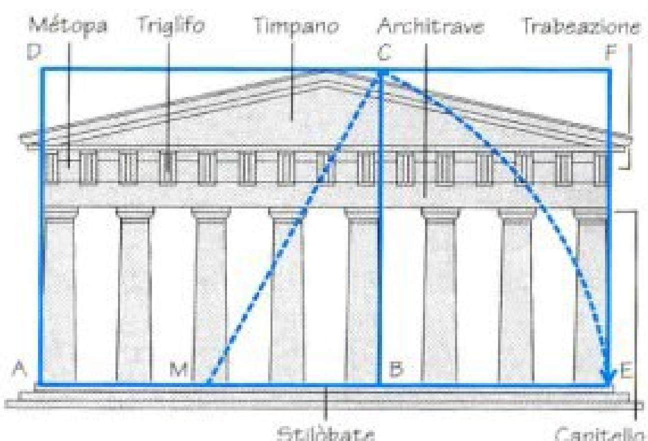
Utilizzare il numero d'oro, per l'uomo greco voleva dire realizzare un'opera in cui l'equilibrio tra le parti garantisse il suo rapporto con le divinità.
Ciò viene rispecchiato nell'architettura. Un importante tempio, "il Partenone", presenta nella facciata il rettangolo aureo.

Anche nella scultura è presenta la sezione aurea, ad esempio nel Doriforo di Policleto, possiamo ritrovare il numero aureo, infatti, misurando l'altezza da terra all'ombelico e l'altezza complessiva, il rapporto risulterà 1,618.



Doriforo –
statua di Policleto





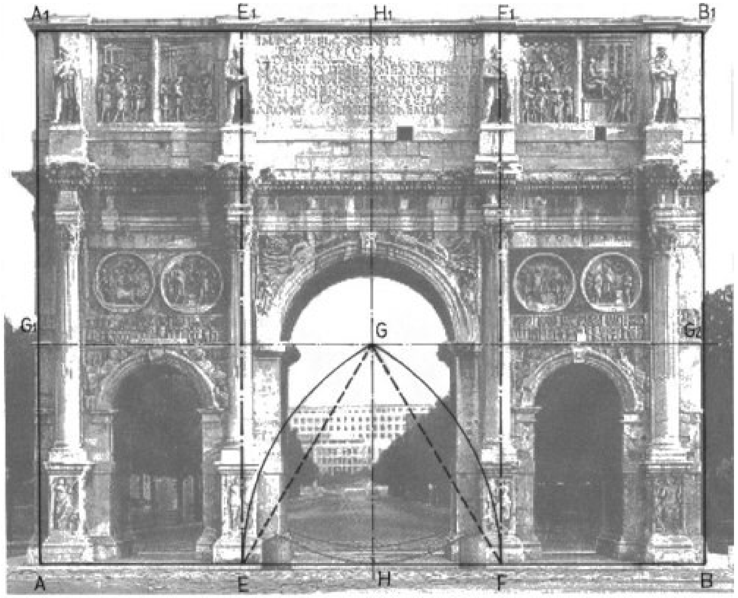
Partenone

Nell’arte

Architettura e scultura

Increduli del fatto che per millenni l’architettura è stata influenzata dal numero d’oro, in una gita fatta a Roma, siamo andati alla ricerca di alcune opere architettoniche che possedessero tale rapporto, come ad esempio il Pantheon e l’arco di Costantino.

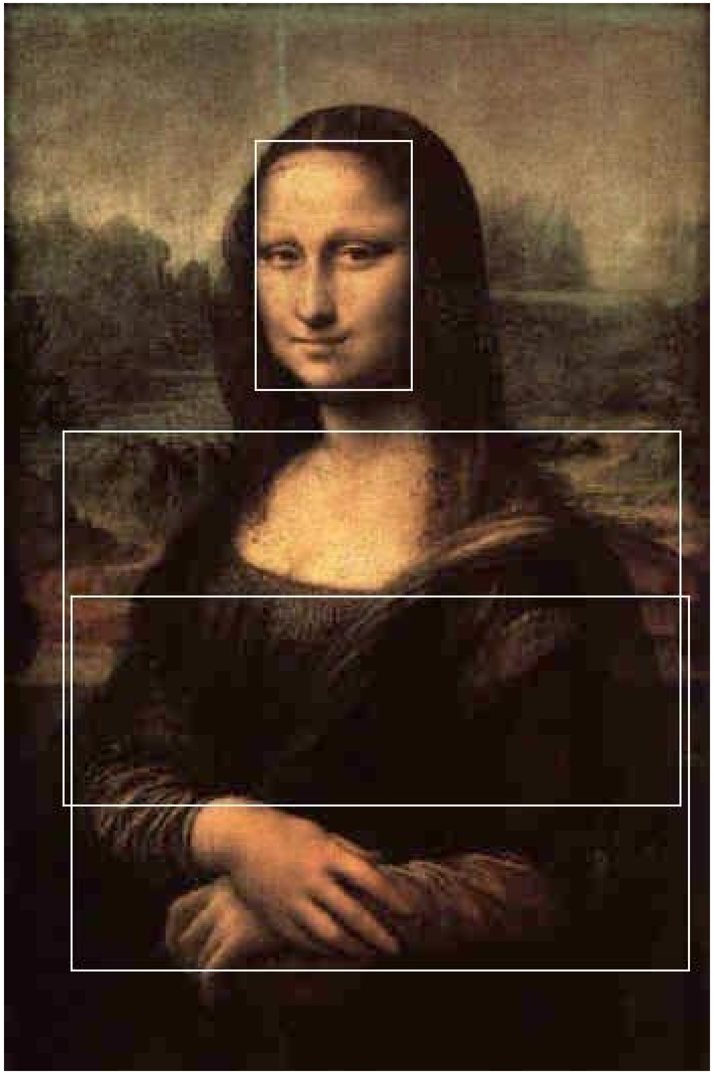
Pantheon



Arco di Costantino

Nell’arte

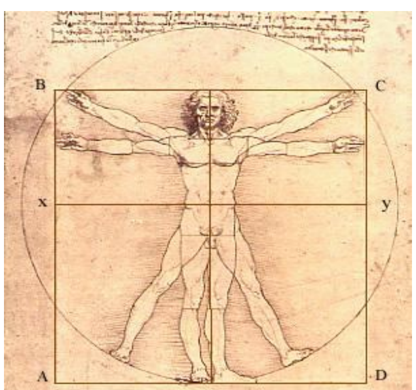
NEI DIPINTI DEL PASSATO

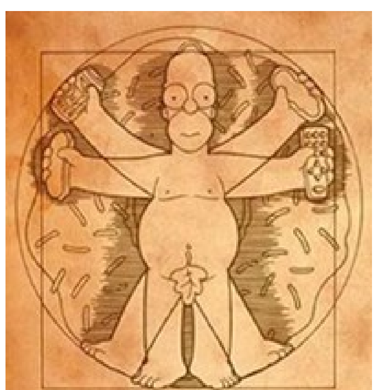


In molte opere di Leonardo da Vinci, Piero della Francesca, Sandro Botticelli, si ricorreva spesso alla sezione aurea (*la divina proportione),* considerata quasi la chiave mistica dell'armonia nelle arti e nelle scienze Infatti nei loro quadri o disegni si trovano molti casi di proporzione aurea: se in una persona proporzionata si moltiplica per 1,618 la distanza dai suoi piedi all'ombelico si ottiene la sua altezza; la distanza dal gomito alla mano con le dita tese, moltiplicata per 1,618, dà la lunghezza totale del braccio.

Nell’arte

L’uomo Vitruviano





Pittura

Il numero Aureo lo troviamo quindi in molte cose gradite alla vista umana e quindi soprattutto nella pittura.

Botticelli (1445-1510) fu affascinato dalla sezione aurea e la rappresentò ne La Venere. Infatti, misurando l’altezza da terra all’ombelicoe l’altezza complessiva della divinità, il loro rapporto risulterà 1,618, così anche il rapporto tra la distanza dal gomito alla punta del dito medio e la lunghezza del braccio.

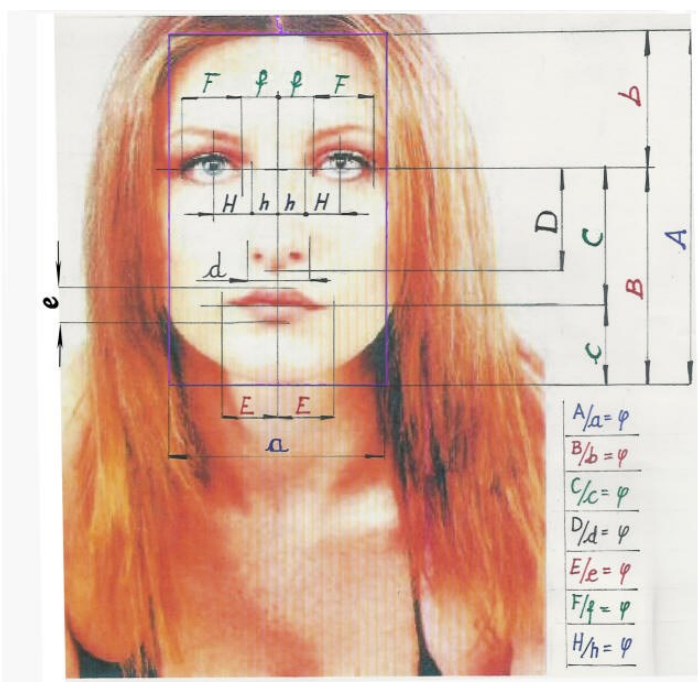
Molto famosa è la rappresentazione di Leonardo dell'uomo Vitruviano in cui una persona è inscritta in un quadrato e in un cerchio. Nel quadrato, l'altezza dell'uomo (AB) è pari alla distanza (BC) tra le estremità delle mani con le braccia distese . Il segmento x;y passante per l'ombelico divide i lati AB e CD esattamente in rapporto aureo tra loro.

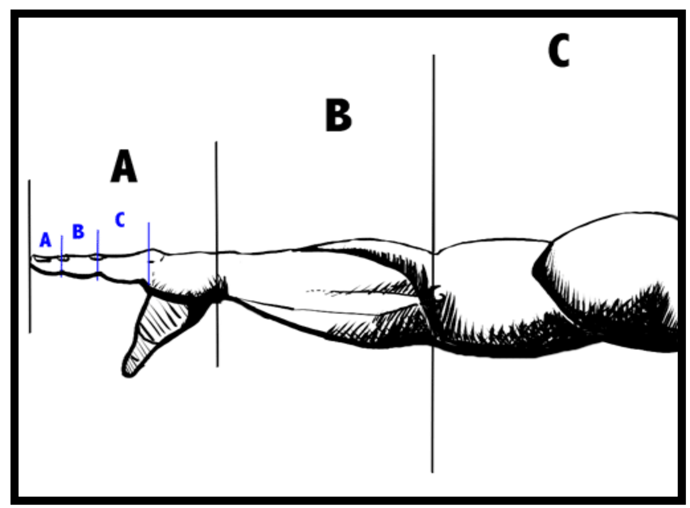
Il corpo umano

I più belli, *<u>come noi</u>*, sicuramente avranno dei rapporti nel “viso” e nel corpo che possono essere ricondotti alla sezione aurea.

Se misuriamo, infatti, le dita della nostra mano, noteremo che i rapporti tra le lunghezze delle falangi del dito medio e anulare sono aurei.

Così come è aureo il rapporto tra la lunghezza del braccio e l'avambraccio, tra la lunghezza della gamba e la sua parte inferiore.





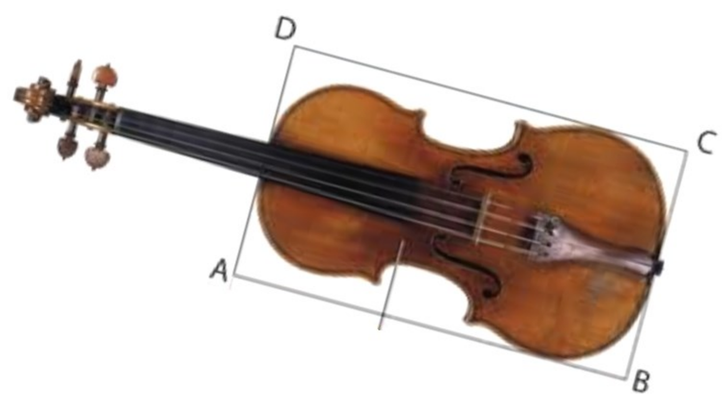
Nella musica

Note e strumenti

Anche la musica non sfugge al fascino del rapporto aureo.

Fortemente sperimentali o meno che siano è bene sottolineare che i primi studi sull’’applicazione della sezione aurea alle strutture formali della musica , la successione individuata da Fibonacci può essere infatti rapportata a qualsiasi unità di misura concernente la musica: durata temporale, numero di note, numero di battute…

La sezione aurea è anche un riferimento per la costruzione di alcuni strumenti musicali, come il violino.

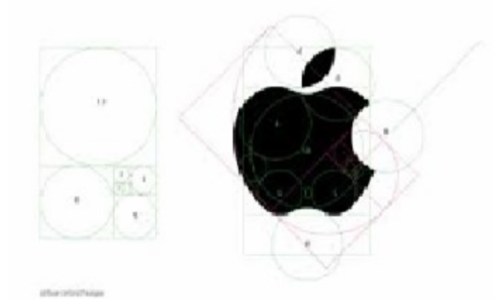


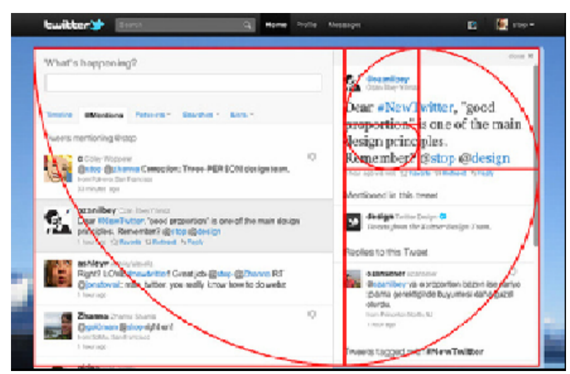
Oggetti quotidiani

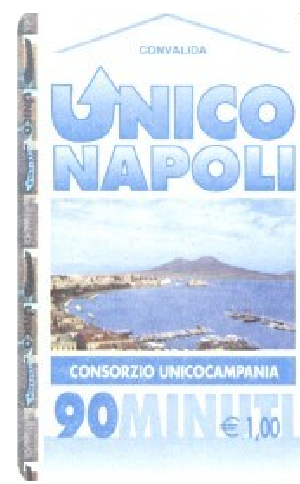
Voi non lo sapete, ma la sezione aurea è presente anche in moltissmi oggetti che usate tutti i giorni!

Sapreste dire quali?

Nelle schede telefoniche, carte di credito e bancomat, carte SIM, nelle schermate degli iPhone, nel biglietto per i mezzi pubblici e nella schermata di Twitter. Sono tutti rettangoli aurei con un rapporto tra base ed altezza pari a 1,618, perchè commercialmente questi oggetti sono maggiormente attratti dall'occhio umano.







La nostra curiosità ci spinge a cercare la "bellezza" aurea anche nella nostra città. Infatti siamo andati per le vie del centro di Roma, muniti di metro e videocamera, alla ricerca della perfezione.